TEORÍA DE CONJUNTOS Y PROBABILIDAD
un resultado adicional a la probabilida conjunta
SET'S THEORY AND PROBABILITY
An aditional showing to set's probability

Lorena Benavidez
María Alejandra Díaz
Valentina Botello
Lic. Fausto Mauricio Lagos

Resumen

La teoría de probabilidades pasa por el estudio de algunas operaciones de la teoría de conjuntos que son herramienta fundamental para el cálculo de probabilidad de eventos conjuntos, y de la ámplia gama de resultados que podrían considerarse, la probabilidad recurre a la intersección de conjuntos, la unión de conjuntos y el complemento para desarrollar todas los cálculos de probabilidad que puedan obtenerse, sin embargo, la eficiencia de estos cálculos en algunos casos puede quedar limitada por la necesidad de expresar coherentemente los eventos conjuntos como eventos disyuntos, hecho que puede mejorar muy significativamente si se recurre a la diferencia de conjuntos.

El presente artículo pretente mostrar como un resultado "*olvidado*"por la teoría de probabilidad conjunta puede simplificar de manera significativa el proceso del cálculo de probabilidades en eventos conjuntos.

The theories of probability go through the stude of some operation of set's theory, which are fundamental tools for calculations in probability of set's events and for the huge study of showings that could be considered, probability appeal to the set's intersection, union and complement for developing all of the probability's calculations that could be obtained, however, the efficiency of these calculations can be sometimes limited because of the requirement to express consistenly the set's as disjunct events, fact that could get better using set's sustraction.

The following article pretends to show how a "forgotten"showing by the set's theory can significantly abbreviate the process for calculating the probabilities of set's events.

Palabras Clave

Diferencia de conjuntos; probabilidad conjunta; disyunción; cálculo de probabilidades.

Set's sustraction; set's probability; disjunction; probabilities' calculations.

La aproximación inicial al estudio de probabilidades se desarrolla a partir de la definición cásica de probabilidad

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}, \tag{1}$$

sin embargo pronto se descubre que esta definición cubre un conjunto muy cerrado de casos del cálculo de probabilidades, así se entra en el estudio de la probabilidad de eventos con más de una característica simultanea o *eventos conjuntos*, allí se toman algunas relaciones de la teoría de conjuntos, se estudian las características de los eventos probabilísticos y se aplican dichas relaciones al cálculo de probabilidades.

En general se estudian tres características de los eventos probabilísticos

- **Eventos Disyuntos:** Dos eventos A y B son disyuntos si no tienen elementos comunes
$$A \cap B = \varnothing. \tag{2}$$
- **Eventos Incluyentes:** Dos eventos A y B son incluyentes si tienen por lo menos un elemento común
$$A \cap B \neq \varnothing. \tag{3}$$
- **Eventos independientes:** Dos eventos son idenpendientes si la probabilidad de éxito de uno, no altera a la probabilidad de éxito del otro.

Con las anteriores definiciones se formulan dos axiomas de probabilidad y tres teoremas que involucran algunas relaciones básicas de los conjuntos.

Axioma 1. *Si A y B son eventos disyuntos, entonces*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{4}$$

Axioma 2. *Si A y B son eventos independientes, se tiene que*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

Teorema 1. *Para cualquier evento A se cumple que*

$$P(A) = 1 - P(A'). \tag{6}$$

Demostración. Para cualquier experimento aleatorio

$$A \cup A' = S.$$

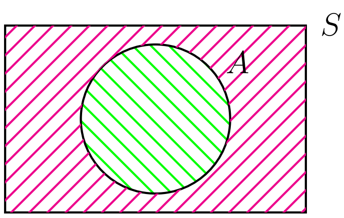

Figura 1: A y complemento de A.

Dado que A y A' son disyuntos, de acuerdo a (2)

$$A \cap A' = \varnothing.$$

Luego, por **Axioma 1**

$$P(S) = P(A) + P(A'),$$

ahora, sabiendo que $P(S) = 1$, se tiene finalmente

$$\begin{aligned} 1 &= P(A) + P(A') \\ 1 - P(A') &= P(A). \end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Para cualquier par de eventos incluyentes se tiene que*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{7}$$

Demostración. Sean A y B dos eventos incluyentes, entonces

$$A \cup B = A \cup (B \cap A')$$

Dado que A y $(B \cap A')$ son disyuntos o mutuamente excluyentes, puede afirmarse que

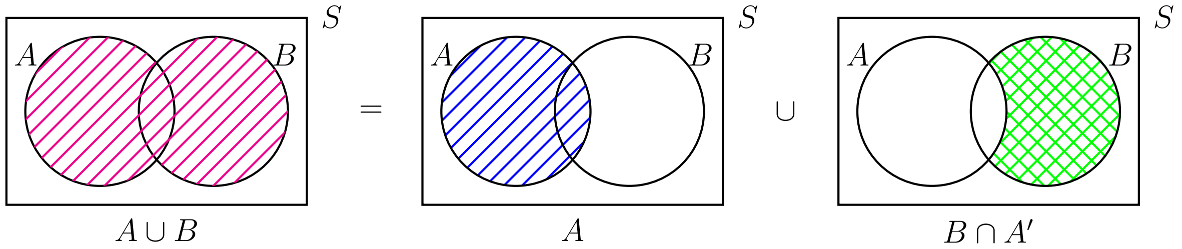

Figura 2: $A \cup B$ como la unión de dos conjuntos disyuntos.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[A \cup (B \cap A')] \\ &= P(A) + P(B \cap A'). \end{aligned}$$

Ahora, una manera alternativa de expresar B es

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$$

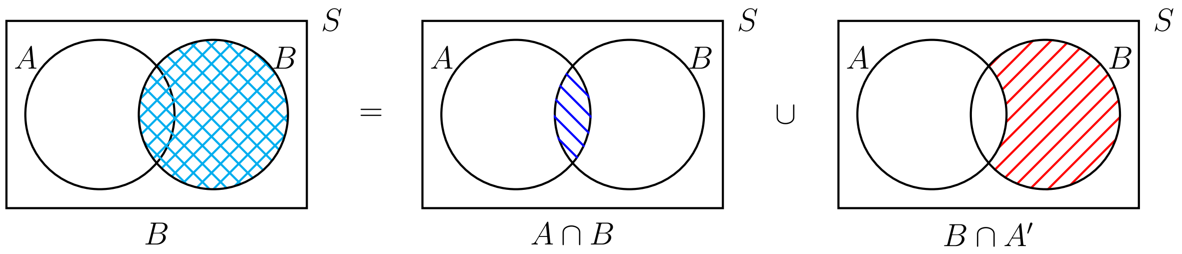

Figura 3: B como la unión de dos conjuntos disyuntos.

Por lo tanto y como $(B \cap A)$ y $(B \cap A')$ son disyuntos

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A') \\ P(B \cap A') &= P(B) - P(B \cap A) \end{aligned}$$

con lo que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

El **Teorema 2**, finalmente, es una generalización del **Axioma 1** ya que si los eventos son disyuntos $P(A \cap B) = 0$.

Teorema 3. *Dados A y B, eventos disyuntos*

$$P(A \cap B) = 0. \tag{8}$$

Demostración. Como $A \cap B = \varnothing$, entonces

$$(A \cap B)' = S$$

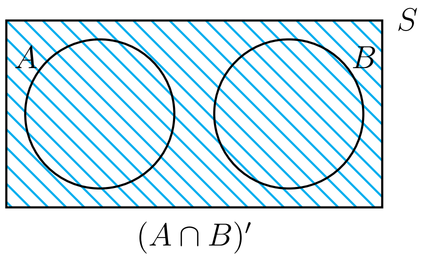

Figura 4: Complemento de dos conjuntos disyuntos.

Con lo que $P(S) = P(A \cap B)'$, luego, utilizando el **Teorema 1**

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(A \cap B)' \\ &= 1 - P(S) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Los anteriores son los resultados que generalmente se emplean en el estudio de la probabilidad conjunta y que como expresa la mayor parte de la bibliografía en la que se estudia la probabilidad básica, los diferentes casos de cálculo de probabilidad conjunta deben reducirse a estos tres teoremas, un ejemplo de ello se presenta a continuación.

Ejemplo: Suponga que en un grupo de último año, de 500 estudiantes se encuentra que: 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 son desordenados en su alimentación, 122 fuman y consumen bebidas alcohólicas, 83 son desordenados en su alimentación y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y son desordenados en su alimentación y 52 de éstos tienen todos los hábitos nocivos para la salud mencionados. Si se selecciona al azar un miembro de este grupo, encuentre la probabilidad de que el estudiante

a) Fume pero no consuma bebidas alcohólicas.

b) Sea desordenado en su alimentación y consuma bebidas alcohólicas pero no fume.

c) Ni fume ni sea desordenado en su alimentación.

Solución

Para organizar la información suministrada se asignan nombres a los eventos simples

- $A = \{\text{Estudiantes que fuman}\}$, $\#A = 210$.
- $B = \{\text{Estudiantes que consumen bebidas alcohólicas}\}$, $\#B = 258$.
- $C = \{\text{Estudiantes que son desordenados en su alimentación}\}$, $\#C = 216$

Con lo cual, puede recrearse la información a través de un diagrama de Venn para observar gráficamente los resultados que deben obtenerse del cálculo de las probabilidades conjuntas que requiere el planteamiento.

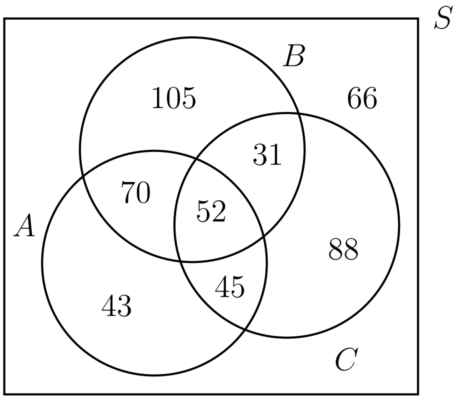

Figura 5: Diagrama de Venn ejemplo 1.

a) La probabilidad del evento en el que un estudiante fuma pero no consume bebidas alcohólicas puede expresarse como
$$P(B' \cap A).$$

Para calcular dicha probabilidad, se recurre a expresar A como la unión de dos conjuntos disyuntos
$$A = (B \cap A) \cup (B' \cap A). \tag{9}$$

Con lo cual, por el **Teorema 1**,
$$\begin{aligned} P(B' \cap A) &= P(A) - P(B \cap A) \\ &= \frac{210}{500} - \frac{122}{500} \\ &\approx 0{,}176. \end{aligned}$$

b) Se hace nuevamente necesario recurrir a la unión de dos eventos disyuntos
$$(B \cap C) = [(B \cap C) \cap A'] \cup [A \cap B \cap C]. \tag{10}$$

Por tanto, haciendo el respectivo despeje y utilizando el **Teorema 1** se tiene que
$$\begin{aligned} P[(B \cap C) \cap A'] &= P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{83}{500} - \frac{52}{500} \\ &\approx 0{,}062. \end{aligned}$$

c) Aunque el interés del estudio que se desarrolló y para el resultado que se propone, recae en el procedimiento empleado en la solución de a) y b), es bueno observar que pasa con la solución del numeral c).
$$\begin{aligned} P(A \cup C)' &= 1 - P(A \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(C) - P(A \cap C)] \\ &= 1 - \frac{210}{500} + \frac{216}{500} - \frac{97}{500} \\ &\approx 0{,}342. \end{aligned}$$

Como se ha observado en el ejemplo anterior, particularmente en las soluciones de los numerales a) y b), con frecuencia es necesario recurrir a expresar el evento objetivo a través de la unión de eventos disyuntos para así poder recurrir a los teoremas que validan el procedimiento de solución, esto hace que deba demostrarse la disyunción entre eventos cada vez que sea necesario para que el procedimiento empleado sea correcto y validado, lo que lleva a una complicación innecesaria si se tiene en cuenta que utilizando la diferencia de conjuntos el procedimientos puede reducirse significativamente.

Claro esta mencionar que para estadísticos experimentados la visualización de estas disyunciones puede ser algo tan mecánico que no sea necesario la introducción de un procedimiento de simplificación mediante la diferencia de conjuntos, sin embargo, como es el caso, cuando se trata de estudiantes que están haciendo su primera aproximación al cálculo de probabilidades si es muy bueno que se tengan en cuenta procedimientos más simples como los conseguidos con lo expresado en el siguiente teorema.

Teorema 4. *Para cualquier par de eventos* A, B

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B). \tag{11}$$

Demostración. Como ya se demostró en el **Teorema 2**, un conjunto puede expresarse como la unión de dos conjuntos disyuntos, así, de acuerdo a lo expresado en la Figura 3

$$A = (A \cap B) \cup (B' \cap A),$$

con lo que, por el **Teorema 1**

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(B' \cap A) \\ P(B' \cap A) &= P(A) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Tomando la definición de la diferencia de conjuntos, se tiene que

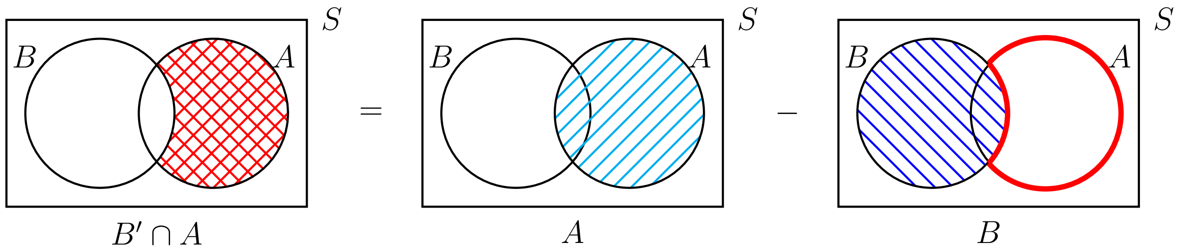

Figura 6: Diferencia de conjuntos.

$$B' \cap A = A - B,$$

de donde

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

□

Es importante notar que el resultado anterior se cumple para cualquier par de eventos, tanto disyuntos como incluyentes, lo que se hace que sea lo suficientemente general.

Si se retoma la solución el ejemplo, puede verse que en el numeral a), no es necesario recurrir a expresar el conjunto A como la unión de dos disyuntos, ya que al observar que el resultado que se busca es “la media luna”de A, es decir $B' \cap A$ como se expresó en esa solución, ahora utilizando el **Teorema 4**, se reduce a

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Es aún más notable la utilización del **Teorema 4**, en la solución del numeral b) ya que elimina la intrincada expresión de $B \cap C$ que se observa en (10), por la expresión

$$P(b) = P(B \cap C) - P(A).$$

con b el evento expresado en el numeral b del ejemplo.

Revisión bibliográfica: Luego de llevar a cabo todo el estudio de la probabilidad conjunta y encontrar el resultado expresado en el **Teorema 4**, surge la pregunta sobre si dicho resultado realmente se ha mantenido al margen del estudio básico del cálculo de probabilidades o si por el contrario algunos autores lo han tenido en cuenta, se desarrolla entonces una revisión bibliográfica ámplia para lo cual se recurre a la escuela de licenciatura en matemáticas y estadística de una Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; la revisión empezó descartando aquellos autores que no tocan la parte básica de la probabilidad para enfocar la búsqueda en los autores que inician el estudio de la probabilidad desde las bases más simples, luego se revisó ampliamente dicha selección concluyendo que la gran mayoría de autores no tocan este resultado y por el contrario plantean la solución de casos como el mostrado en el ejemplo citado recurriendo a la demostración de la disyunción para $B' \cap A$. Dentro de toda la revisión únicamente el libro [3] presenta este resultado como una propiedad de las reglas aditivas de la probabilidad conjunta pero no le otorga especial atención, sin embargo, y considerando el dedicado estudio que se hizo de ésta probabilidad se observa que la vinculación de éste resultado implica una seria simplificación en el procedimiento de solución de casos similares a el ejemplificado y por tanto se convierte en un importante aporte al estudio de la probabilidad conjunta en cursos básicos.

Referencias

[1] SANTOS. David A, *Probability an introduction*, Jones and Bartlett Publishers, USA, 2011.

[2] TAHA. Hamdy A, *Investigacón de operaciones*, Pearson Education Inc, México, 2004.

[3] GUIJARRO. Marta CARRILLO. Isabel, *Estadística descriptiva y cálculo de probabilidades*, Person Prentice Hall, España, 2006.

[4] SIMON. Gary A FREUD. John E, *Estadística elemental*, Prentice Hall, Colombia, 1994.

[5] BHERO. José GARCÍA. Jesús Esteban, *Estadística descriptiva y nociones de probabilidad*, Thompson, España, 2005.

[6] KUBY. Patricia JOHNSON. Robert, *Estadística elemental: lo esencial*, Cengage Learning Editores, México, 2003.

[7] DEVORE. Jay L, *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, Thomson, México, 2004.

[8] ROSS. Sheldon M, *A first course in probability*, Pearson Education, New Jersey, 2010.

[9] SINCICH. Terry MENDENHALL. William, *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, Prentice Hall Hispanoamerica, México, 1997.

[10] EVAN. Michael ROSENTHAL. Jeffrey, *Probabilidad y estadística*, Editorial Reverté, España, 2005.

Licenciado Fausto Mauricio Lagos Suárez
Villas del mundial Blq A 26 Apto 302
Duitama (Boyacá) - Colombia
Colegio Seminario Diocesano de Duitama
Docente de Matemáticas
+57 311 548 39 25
fausto.lagos@colseminario.edu.co

Lorena Benavidez, María Alejandra Díaz y Valentina Botello son estudiantes de último grado de bachillerato en el Colegio Seminario Diocesano, han tenido un desempeño satisfactorio en el área de matemáticas y son estudiantes muy inquietas por la investigación y el conocimiento, destacan en deportes y música además de su muy buen rendimiento académico, desarrollaron el presente artículo motivadas por las dificultades que encontraron en el estudio de la probabilidad básica y encontraron que el resultado expuesto en el Teorema 4, simplifaca satisfactoriamente tanto el aprendizaje como el cálculo de probabilidades conjuntas.

Fausto Mauricio Lagos Suárez, licenciado en matemáticas y estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, candidato a magister en Software Libre por la Universita Oberta de Catalunya, autor de los libros, *Geometría Analítica con Matlab* y *Apuntes de trigonometría y geometría analítica.*